Politechnika
Warszawska

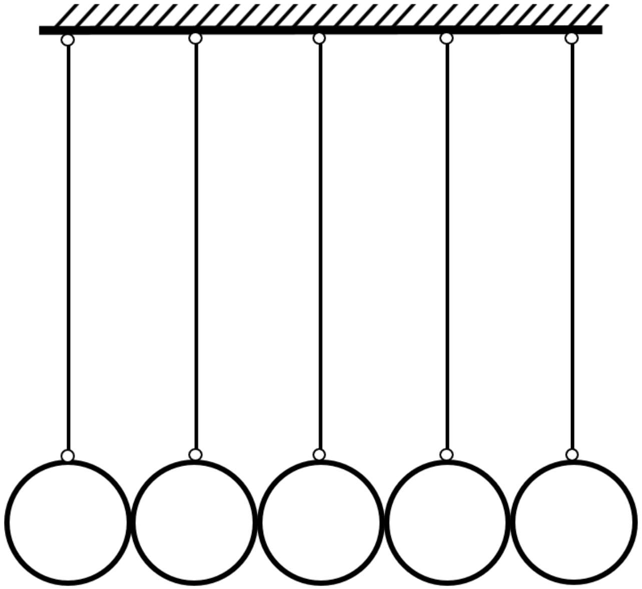
Modelowanie i symulacja wahadła Newtona

Wiesław Grzesikiewicz
Wydział Samochodów i Maszyn Roboczych PW

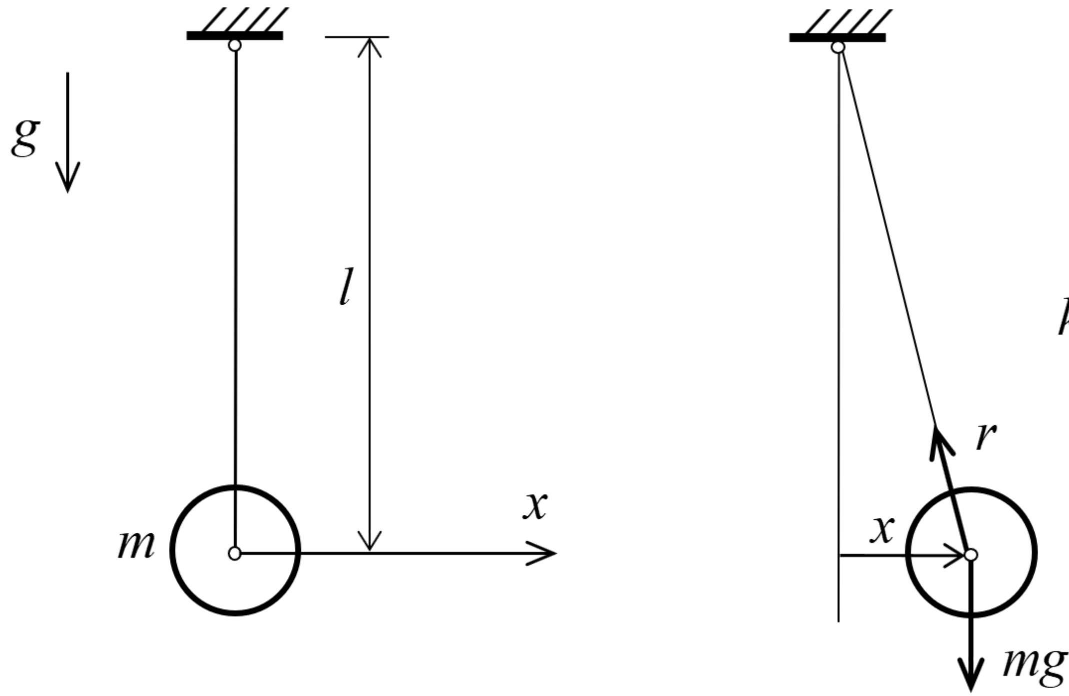
Artur Zbiciak
Wydział Inżynierii Lądowej PW

Ustroń, 22-26.02.2020 r.

Wahadło Newtona



Model wahadła



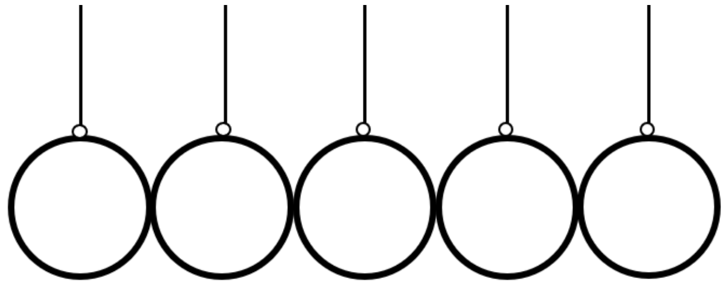
$$k := \frac{mg}{l}$$

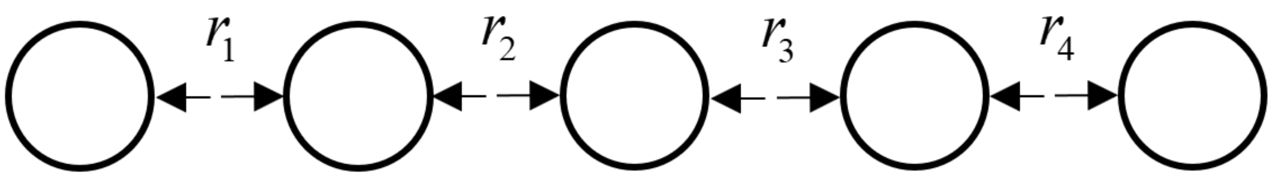
Układ pięciu wahadeł matematycznych

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

$$x(0) = x_o\,, \quad \dot{x}(0) = v_o$$

Oddziaływanie kontaktowe





r_i - siły odpychające, $i = 1, \ldots, 4$

$r \in R^4 , \quad r := \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$

Charakterystyka oddziaływania kontaktowego

r_i - siła kontaktowa, $i = 1, \ldots, 4$

u_i - odległość między kulami, $i = 1, \ldots, 4$

$u_i := x_{i+1} - x_i$

Charakterystykę opisuje się relacją χ między siłą r_i i odległością u_i.

Postać charakterystyki ustala się na podstawie uzgodnienia

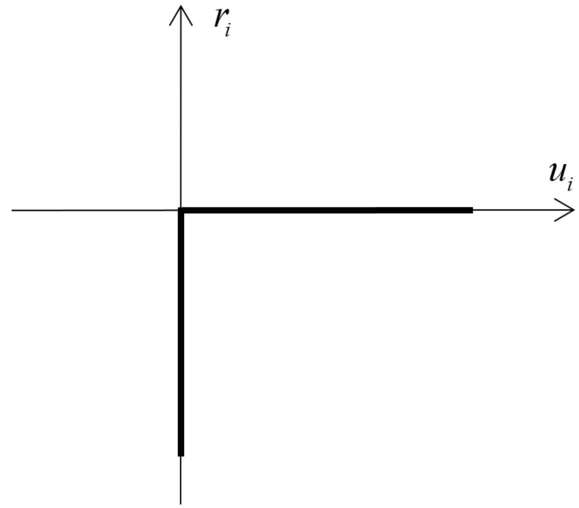
wyników doświadczeń.

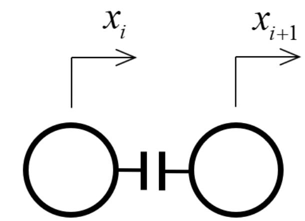
Hipotezy oddziaływania kontaktowego

1. Hipoteza Newtona

$$r_i\left(u_i - \xi\right) \geq 0 \quad \forall \xi \geq 0$$

$$i = 1, \ldots, 4$$



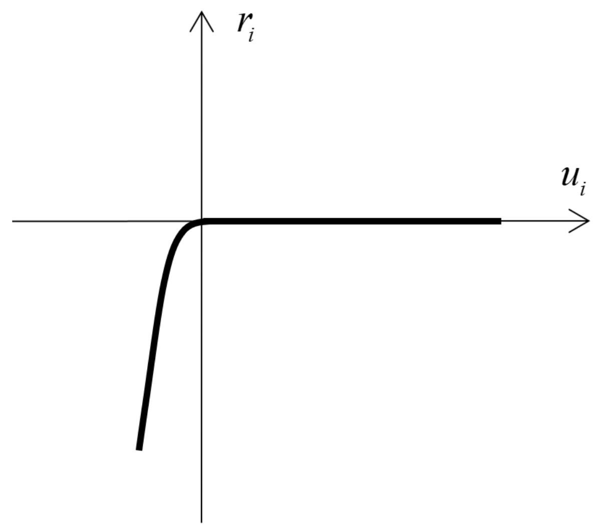


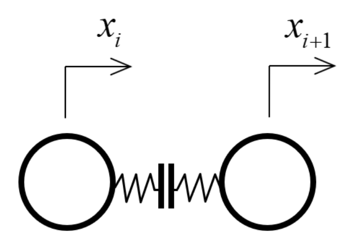
2. Hipoteza Hertza

$$r_i = f\left(u_i\right)$$

$$f\left(u\right) := \begin{cases} 0 & \text{gdy } \ u \geq 0 \\ -k_H \left|u\right|^{\nu} & \text{gdy } \ u < 0 \end{cases}$$

$$k_H := \frac{\sqrt{2\rho}\, E}{3\left(1-\mu^2\right)}, \quad \nu = \frac{3}{2}$$





Równania ruchu wahadła Newtona

$$\boxed{M\ddot{X} + KX + Gr = 0, \quad X(0) = X_o, \quad \dot{X}(0) = V_o}$$

$$X := \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{bmatrix}^T \in R^5, \quad r := \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \end{bmatrix}^T \in R^4$$

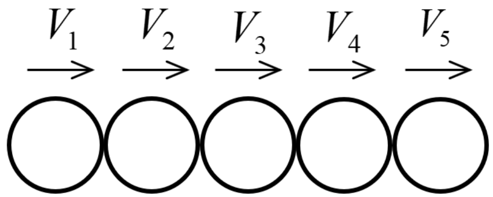
$$M := \operatorname{diag}(m) \in R^{5\times 5}, \quad K := \operatorname{diag}(k) \in R^{5\times 5}$$

$$G := \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in R^{5\times 4}$$ - macierz więzów

$$u = G^T X, \quad u_i = x_{i+1} - x_i, \quad u := \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{bmatrix}^T \in R^4$$

$(r_i, u_i) \in \chi$ - charakterystyka siły kontaktowej

Zderzenie sprężyste: zasadnicze zagadnienie wahadła Newtona



$$V := \begin{bmatrix} V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \in R^5$$

Dane:

t_{o} - chwila początkowa

$u_i\left(t_{\mathrm{o}}\right) = 0\,, \quad i = 1,\ldots,4$ - wszystkie kule stykają się

$V\left(t_{\mathrm{o}}\right) \equiv V^-$ - wektor prędkości kul przed zderzeniem taki, że istnieje co najmniej jedna składowa

$\dot{u} = G^{\mathrm{T}} V^-$ taka, że $\dot{u}_i := V_{i+1} - V_i < 0\,, \; i \in \left\{1, 2, 3, 4\right\}$.

Wyznaczyć:

najmniejsze $\Delta t > 0$ oraz wektor $V\left(t_{\mathrm{o}} + \Delta t\right) \equiv V^+$ - prędkości kul po zderzeniu taki, że $G^{\mathrm{T}} V^+ \geq 0$, $\left\{\dot{u}_i\left(t_{\mathrm{o}} + \Delta t\right) \geq 0,\; u_i\left(t_{\mathrm{o}} + \Delta t\right) \geq 0\right\} \; \forall i \in \left\{1, 2, 3, 4\right\}$

oraz spełniający warunek zderzenia sprężystego

$$\frac{1}{2}\left(V^-\right)^{\mathrm{T}} M V^- = \frac{1}{2}\left(V^+\right)^{\mathrm{T}} M V^+$$

Zderzenie sprężyste według hipotezy Newtona-Poissona

Założenie: $\Delta t = 0$; następuje nieciągła zmiana prędkości – opis zderzenia dwuetapowy.

I etap: sprężanie – zderzenie plastyczne

Wyznaczyć: $V^* \in R^5$ - wektor prędkości po zderzeniu plastycznym;

$\tilde{r} \in R^5$ - wektor reakcji impulsowych [Ns], na podstawie relacji:

$$\boxed{\begin{array}{l} MV^* - MV^- = G\tilde{r} \\ \\ G^{\mathrm{T}}V^* \geq 0, \quad \tilde{r} \geq 0, \quad \tilde{r}^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}V^* = 0 \end{array}}$$

Równoważny opis powyższego zadania

$$\boxed{V^* = \arg\min C(V)}$$

gdzie $C(V) := \frac{1}{2}\left(V - V^-\right)^{\mathrm{T}} M \left(V - V^-\right)$ - funkcjonał L. Carnota

II etap: odprężanie

Wyznaczyć: $V^+ \in R^5$ - wektor prędkości po zderzeniu plastycznym

$$\boxed{MV^+ - MV^* = G\tilde{r}}$$

Zderzenie sprężyste według hipotezy Hertza

Rozpatrujemy zagadnienie początkowe w przedziale $t \in \left[0, t_k\right)$

$$\boxed{M\ddot{X} + KX + Gr = 0, \quad X(0) = X_{\mathrm{o}}, \quad \dot{X}(0) = V_{\mathrm{o}}}$$

składowe wektora $r \in R^4$ wynoszą:

$$\boxed{r_i = f(u_i), \quad u_i = G_i^{\mathrm{T}} X \equiv x_{i+1} - x_i}$$

Zakładamy, że w chwili początkowej $t = 0$ kule nie stykają się $u_i > 0 \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$t_{p1} > 0$ - chwila, w której rozpoczyna się pierwsze zderzenie, czyli istnieje $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

takie, że $u_i(t_{p1}) = 0$ oraz $\dot{u}_i(t_{p1}) < 0$

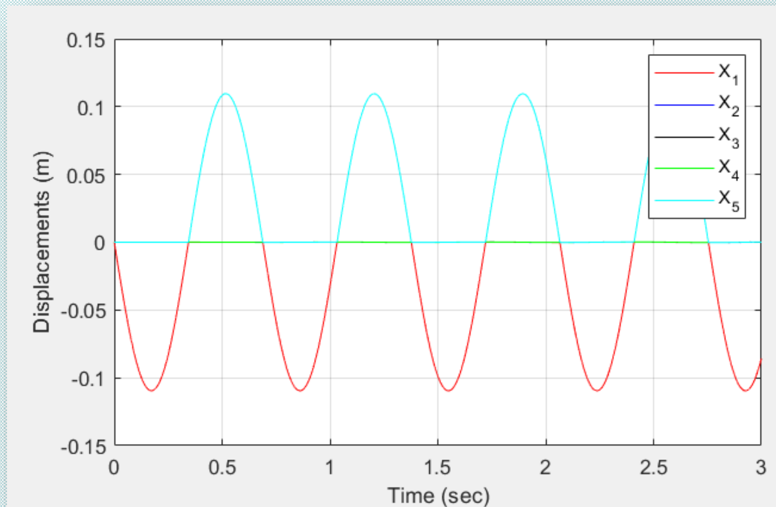
$t_{k1} > t_{p1}$ - chwila, w której kończy się pierwsze zderzenie, czyli $\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$, $u_i(t_{k1}) \geq 0$

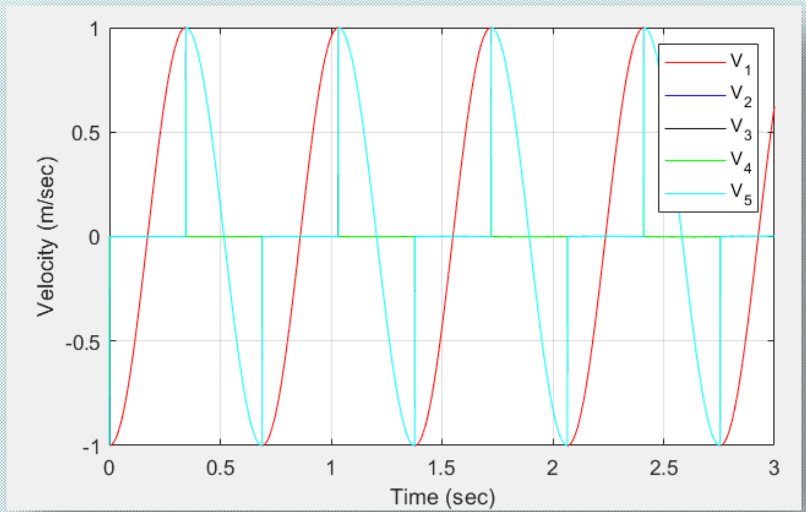
oraz $\dot{u}_i(t_{k1}) > 0$.

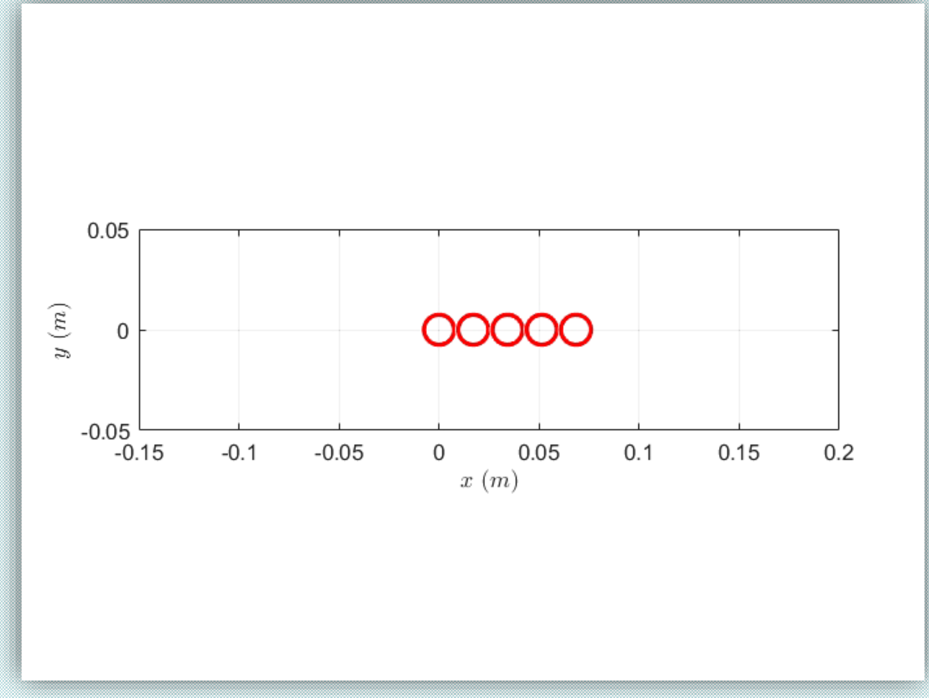
Zmiana prędkości w czasie zderzenia: $V^- := \dot{X}(t_{p1})$, $V^+ := \dot{X}(t_{k1})$

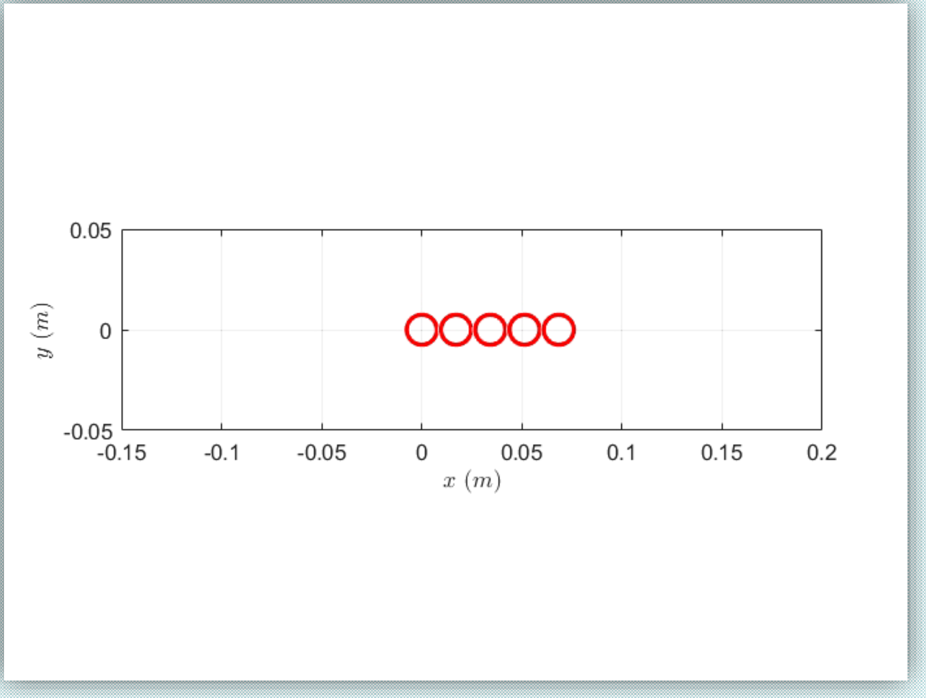
Impulsy sił kontaktowych: $\tilde{r}_i := \displaystyle\int_{t_{p1}}^{t_{pk}} f(x_{i+1} - x_i)\,\mathrm{d}t$

Wyniki symulacji komputerowych









Politechnika
Warszawska

Dziękuję za uwagę!